Angewandte Mathematik
WS 2005/06

Vorlesungsmitschrift von Björn Spichal
geschrieben in LaTeX

Stand: 1. Dezember 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **3**

2 Differentialgleichungen und ihre Lösungen **3**
2.1 Bezeichnungen von Differentialgleichungen . . . 3
2.1.1 Definition E - lineare Differentialgleichung . . . 4
2.2 Lösungen vom Differentialgleichungen . . . 4
2.2.1 Definition: Lösungsarten . . . 4

3 Differentialgleichungen 1. Ordnung **6**
3.1 Richtungsfeld expliziter Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . 6
3.2 Existenz und Eideutigkeit von Lösungen . . . 6
3.3 spezielle integrierbare Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . 7
3.3.1 separierbare Gleichungen . . . 7
3.3.2 Anwendungsbeispiele . . . 8
3.3.3 Homogene Differentialgleichungen . . . 10
3.3.4 verallgemeinerte homogene Differentialgleichungen . . . 11
3.3.5 Exakte Differentialgleichungen . . . 12
3.3.6 Methode des integrierenden Faktors . . . 15
3.3.7 Explizite lineare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . 16
3.3.8 Variation der Konstanten . . . 18
3.3.9 Aufsuchen einer speziellen Lösung . . . 19
3.3.10 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . 19

4 Differentialgleichungen höherer Ordnung **20**
4.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen . . . 20
4.2 Einige Sonderfälle für Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . 20
4.2.1 Die Differentialgleichung $y'' = f(x)$ . . . 20
4.2.2 Die Differentialgleichung $y'' = f(x, y')$ . . . 20
4.2.3 Die Differentialgleichung $y'' = f(y)$ . . . 21
4.3 Explizite homogene und inhomogene linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung . 21

1 Einführung

Buchempfehlung sind die Bücher von Papula.

2 Differentialgleichungen und ihre Lösungen

2.1 Bezeichnungen von Differentialgleichungen

Definition A - gewöhnlliche Differentialgleichungen : Die Funktion y hängt *nur von einer* unabhängigen Variablen ab.
z.B.: $y^{'}(x) = x$

Annahme: y sei eine *reellwertige* Funktion der *reellwertigen* Veränderlichen x!

Allgemeine Form:

$$f(x, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0 \tag{2.1}$$

→ f **ist eine reellwertige Funktion von** $(k+2)$ **reellwertigen Variablen**

wichtige Annahme:

$$f \text{ sei eine stetige reellwertige Funktion.} \tag{2.2}$$

Beispiel: Wie lautet f für $y'(x) = x$?
→ $f(x, y') = y'(x) - x = 0$

Definition B - Ordnung von Differentialgleichungen : Die höchste, in f nicht trivial auftretende, Ableitung definiert die *Ordnung* der Differentialgleichung .

Definition C - explizite/imnplizite Differentialgleichungen : Die Differentialgleichung heißt *explizit* , wenn sie nach der höchsten Ordnung aufgelöst ist. Andernfalls heißt sie *implizit* . Also:

$$y^{(k)} = g(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}) \tag{2.3}$$

Definition D - partielle Differentialgleichungen : Hängt eine Differentialgleichung von *mehr als einer unabhängigen* variablen ab, so nennt man sie *partielle Differentialgleichung* .

Beispiel:

- Fehlerrechnungen
- $y(x, t)$ mit $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\delta^2 y}{\delta t^2}$ (eindimensionale Wellengleichung)

Beispiel:

1. $\frac{1}{2} m y' + V(y) = E$
   ⇒ gewöhnlich, implizit, 1. Ordnung
2. $y'' + X(y')^2 + 2x^3 y^3 = 0$
   ⇒ gewöhnlich, implizit, 2. Ordnung

2.1.1 Definition E - lineare Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung heißt *linear* , wenn sie als Funktion von y linear ist. Linaere gewöhnliche Differentialgleichung der Orndung n:

$$a_n(x) <^{(n)} (x) + \cdots + a_0(x)y(x) = b(x) \tag{2.4}$$

wobei $a_i(x)$, $b(x)$ stetig seien.

Beispiel: (Besselsche Differentialgleichung der 2. Ordnung)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \, , n \in \mathbb{N}$$

Gegenbeispiel: (Fadenpendel)

$$y'' + \frac{g}{l} \sin y = 0$$

2.2 Lösungen vom Differentialgleichungen

→ zunächst nur gewöhnliche Differentialgleichung
→ unabhängige Variable sei x oder t

Eine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ ist *jede* Funktion $y = y(x)$, $x \in \mathbb{D}$, mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Funktion y ist im Definitionsbereich $\mathbb{D}$ genau n-mal differenzierbar, d.h. die Funktionen $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ existieren!

b) Die, beim Einsetzen von $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ in die linke Seite von (2.1) entstehende unmittelbare Funktion von x, $f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))$ ist für alle $x \in \mathbb{D}$ gleich 0.

Merke: In der Regel hängen die Lösungen der Differentialgleichung noch von Parametern bzw. Integrationskonstanten ab!

Beispiel:

(i) $y^{(n)} = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = a_0 + a_1x + a_2X^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$

(ii) $y'' + y = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = a \sin x + b \cos x$ (Schwingungsfähiges System)

Faustregel: Lösung einer Differentialgleichung der Ordnung n hängt von n Parametern ab!

2.2.1 Definition: Lösungsarten

Allgemeine Lösungen: Parameter nicht spezifiziert
Spezielle / Partikutive Lösungen: Paramtere spezifiziert
singuläre Lösungen: nicht über Parameterfestlegung spezifiziert!

Beispiel einer singulären Differentialgleichung
Die Differentialgleichung $y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$ hat die allgemeine Lösung $y = 2xa - a^2$ mit *einer* Integrationskonstanten $a \in \mathbb{R}$. Die Lösungen bilden eine Schar von Tangenten an die Parabel $Y = x^2$. Da die

Lösungen als Tangenten *genau* einen gemeinsamen Punkt mit der einhüllenden Parabel haben, *muss* auch diese Lösung der Differentialgleichung sein - und zwar unabhängig von a!

Beweis
$y' = 2x \;\Rightarrow$ einsetzen: $x^2 x \cdot 2x - \frac{1}{4}(2x)^2 = x^2$
Aber: $y = x^2$ ist nicht in der allgemeinen Lösung $y = 2xa - a^2$ enthalten. D.h. $y = x^2$ ist eine singuläre Lösung!

3 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Aus (2.1) und (2.3) ergibt sich, dass die sogenannte implizite gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnug durch

$$f(x, y, y') = 0 \tag{3.1}$$

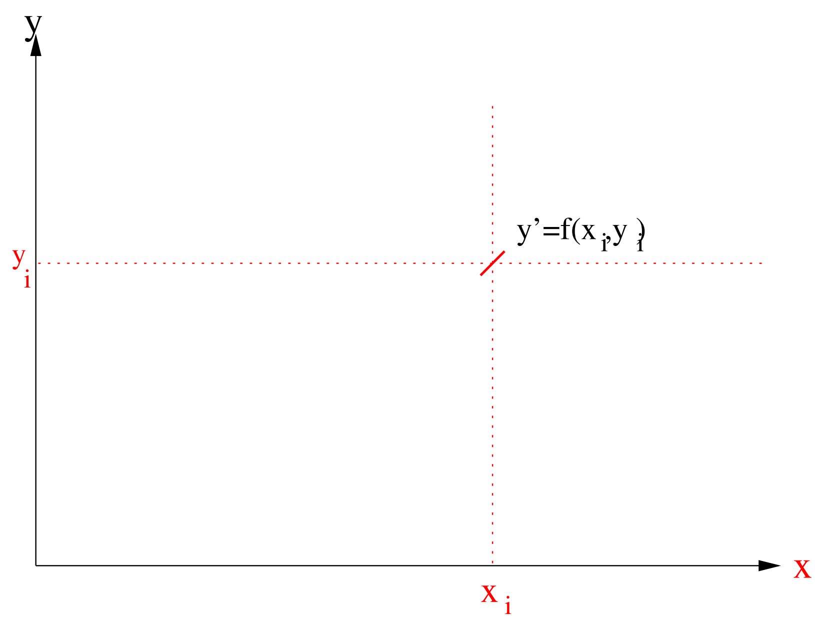
gegeben ist. Für die explizite Differentialgleichung gilt:

$$y' = f(x, y) \tag{3.2}$$

Mit Hilfe von (3.2) kann man sofort einen Eindruck von der Lösung der Differentialgleichung bekommen, ohne sie intigrieren zu müssen.

3.1 Richtungsfeld expliziter Differentialgleichungen 1. Ordnung

$\rightarrow$ Generell läßt sich die allgemeine explizite Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x, y)$ *nicht* geschlossen intigrieren.
$\Rightarrow$ Man bekommt einen Eindruck von den Lösungskurven, wenn man sich das *Richtungsfeld* ansieht. Dabei werden im (x, y)-Koordinatensystem kurze Geradenstücke zentriert um den Punkt (x_i, y_i) mit den Steigungen $f(x_i, y_i)$ abgetragen!.



Eine Lösungskurve muss in *jedem* ihrer Punkte, die durch das Richtungsfeld vorgegebene Steigung besitzen

3.2 Existenz und Eideutigkeit von Lösungen

Aus dem Richungsfeld lassen sich Lösungen ableiten!

a) Es gibt *unendlich* viele Lösungen $y = y(x)$ für $y' = f(x, y)$

b) Es gibt durch jeden Punkt des Definitionsgebietes $\mathbb{D}$ von $f(x, y)$ *genau eine* Lösung $y = y(x)$ von $y' = f(x, y)$ bestehend aus $y' = f(x, y)$ *und* der sogenannten *Anfangsbedingung* $y(x_0) = y_0$.

$\Rightarrow$ Anfangswertproblem bzw. Cauchy-Problem

3.3 spezielle integrierbare Differentialgleichungen 1. Ordnung

3.3.1 separierbare Gleichungen

Definition 3.1 - separierbare Gleichungen Eine explizite Differentialgleichung 1. Ordnung heißt *separierbar* , wenn die Form

$$y' = h(x) \cdot g(y) \tag{3.3}$$

het, wobei g, h stetige Funktionen auf dem Definitionsbereich $\mathbb{D}$ seien.

Diese Differentialgleichung kann *immer* durch "Trennung der Variablen" gelöst werden. Vorraussetzung ist, dass $g(y) \neq 0$
$\Rightarrow \frac{y'}{g(y)} = h(x)$.
Integration über x auf beiden Steiten ergibt: $\int \frac{y'}{g(h)} dx = \int h(x) dx$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx \tag{3.4}$$

Gleichung (3.4) stellt die *allgemeine* Lösung dar.

Beispiel:
$y' = y \cdot x^2 \Rightarrow \frac{y'}{y} = x^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx$
$\Leftrightarrow \ln|y| + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_2$
$\Rightarrow \ln|y| = \frac{x^3}{3} + C^*$ mit $C^* = C_2 - C_1$
$\Rightarrow$ Lösung: $y(x) = \pm e^{\frac{x^3}{3} + C^*}$

Mit Hilfe der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ergibt sich die Lösungsformel für die *spezielle Lösung*

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\hat{y}}{g(\hat{y})} = \int\limits_{x_0}^{x} h(\hat{x}) d\hat{x} \tag{3.5}$$

Beispiel:
$y' = yx^2$ mit $y(x_0) = y_0$
$\Rightarrow \int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\hat{y}}{\hat{y}} = \int\limits_{x_0}^{x} h(\hat{x}^2) d\hat{x}$
$\Leftrightarrow \ln|\hat{y}|\Big|_{y_0}^{y} = \frac{\hat{x}^3}{3}\Big|_{x_0}^{x}$
$\Leftrightarrow \ln|y| - \ln|y_0| = \frac{x^3}{3} - \frac{x_0^3}{3} = \frac{1}{3}(x^3 - x_0^3)$
$\Leftrightarrow \ln\frac{|y|}{|y_0|} = \frac{1}{3}(x^3 - x_0^3)$

$\Rightarrow y = y_0 \cdot e^{\frac{1}{3}(x^3 - x_0^3)}$ mit $(y, y_0) \in \mathbb{R}^+ \backslash 0$

$y' = f(x,y) = g(y) \cdot h(x)$

3.3.2 Anwendungsbeispiele

$\rightarrow$ Wie schnell wächst der Fußpilz?

A - ein einfaches Modell :
$\rightarrow$ Populationsdynamik
Annahme: t sei eine Zeit, $x(t)$ die Anzahl der Lebewesen (Fußpilz) zur Zeit t.

Erfahrung: Sichtiwort "Kaninchen auf Sizilien!"

$\Rightarrow$ Viele Lebewesen produzieren mehr Nachwuchs als wenige!
1. Idee Zeitliche Änderung der Population $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ sei mit der Größe der Population $x(t)$ selbst gekoppelt.

$\Rightarrow\ \dot{x} \sim x$ bzw. $\dot{x} = r \cdot x$ mit $r \in \mathbb{R}$ als Proportionalitätskonstante.
Lösung $\dot{x} = f(t,x) = g(x) \cdot h(x)$

$\cong g(x) = x, h(t) = 1 \cdot r$
$\Rightarrow$ Methode: Trennung der Variablen anwendbar. $\frac{\dot{x}}{x} = r$
Anwendungsbedinung: $x(t=0) = x_0$ ist die Populationsgröße zum Zeitpunkt $t = 0$!
Mit *(3.5)* gilt: $\int\limits_{x_0}^{x(t)} \frac{d\hat{x}}{\hat{x}} = \int\limits_{t=0}^{t} r \cdot d\hat{t}$
$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{x(t)}{x_0}\right| = r \cdot t$
$\Leftrightarrow x(t) = x_0 \cdot e^{r \cdot t}$ mit $(x, x_0) \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$

Interpretation : 3 Arten von Lösungen(in Abängigkeit von r) existieren:

1. $r = 0:$ $x(t) = x_0$ gilt für alle Zeiten t, niemand wird geboren oder stirbt!
2. $r > 0:$ Unbeschränktes Wachstum: $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) \to \infty$
3. $r < 0:$ $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$, d.h. die Population stirbt aus, und zwar *unabhängig* von den Anfangspopulation x_0

Problem: Modell ist zu einfach!

Grund: Populationen wachsen, bis zu einer "kritische Dichte". Wenn diese erreicht ist (Knappheit der Nahrung, Krankheit, Seuchen), steigt die Sterblichkeit bis wieder neues Wachstum einsetzen kann.

B - Realistischeres Modell :
$\rightarrow$ WEnn die Population zu groß wird, soll sie wegen Überbevölkerung wieder kleiner werden. Unterschreitet die Population eine gewisse Schranke, dann ist wieder genug Platz zum Wachsen da!

$$\Rightarrow \dot{x} = r \cdot x \cdot (L - x) \; (r, L) \in \mathbb{R}, L > 0 \tag{3.6}$$

$x(t = 0) = x_0$ sei Anfangsbedingung.

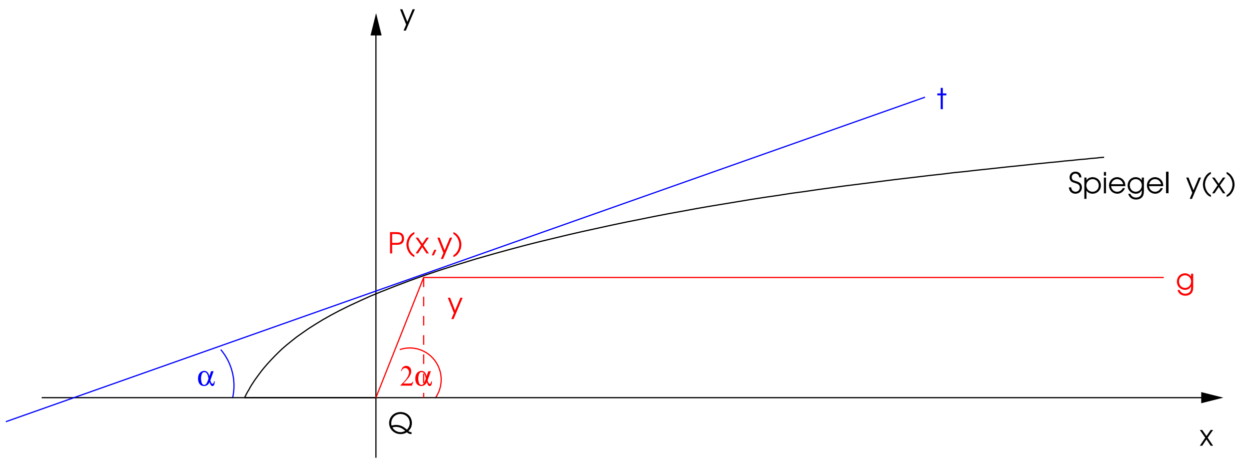
Wie verhält sich (3.6)?Für $r > 0$ gilt:

- Ist $x = L$, dann ist $\dot{x} = 0 \Rightarrow$ stabile Population
- Ist $x > L$, dann ist $\dot{x} < 0 \Rightarrow$ Population stirbt aus/wird kleiner
- Ist $x < L$, dann ist $\dot{x} > 0 \Rightarrow$ Population wächst

Man nennt Gleichung (3.6) die *logistische Differentialgleichung* (demographisches Modell von Verhast [1804 - 1849]). Die Zeitliche Veränderung der Population ist der Vermehrungsfaktor. Dieser Vermehrungsfaktor L ist die optimale Maximalgröße der Population.

C - Noch realistischeres Modell :
Noch realistischere Modelle beinhalten Faktoren wie Zu- und Abwanderung, Kriege etc.

Beispiel: Automobilindustrie (Hella)
Man konstruiere einen Spiegel, der das von einem Punkt Q (Position einer Halogenlampe) ausgehendes Licht *an jeder Stelle* seiner Oberfläche *parallel* abstrahlt.



$\Rightarrow$ Physik: Reflexionsgesetz. Es gilt: g x-Achse.
Tangente an dem Spiegel entspricht der Steigung im Punkt $P(x, y)$
Tangentensteigung: $\tan \alpha = y'(x) \qquad (\star)$
Steigung der Geraden $\overline{QP}$ ist $\frac{y}{x} = \tan 2\alpha$. Mit Additionstheorem:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

ist

$$\frac{y}{x} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2y'}{1 - (y')^2}$$

Aufgelöst nach y' ergibt sich: $y - y(y')^2 = sxy' \;\Leftrightarrow\; (y')^2 + 2\frac{x}{y}y' - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow y' = -\frac{x}{y} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \tag{3.7}$$

Wie löst man die Gleichung (3.7)?
→ Variablentrennung funktioniert (so) nicht! **Aber:** Es fällt auf, dass y' nur von $\frac{x}{y}$ abhängt! Eine solche Differentialgleichung nennt man **homogen** ! ⇒ Allgemein:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ oder } y' = f\left(\frac{x}{y}\right) \tag{3.8}$$

3.3.3 Homogene Differentialgleichungen

Homogene Differentialgleichungen lassen sich durch *Variablentransormation* in separierbare Differentialgleichungen überführen!

Mit $z = \frac{y}{x}$ mit $y = x \cdot z$ und $y' = x' \cdot z + x \cdot z' = z + xz'$ Einsetzen in (3.8) ergibt sich:

$$f(z) = z + xz' \tag{3.9}$$

$$\Leftrightarrow xz' = f(z) - z \tag{3.10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{z'}{f(z) - z} \tag{3.11}$$

Gleichung (3.11) kann für $f(z) \neq z$ und $x \neq 0$ gelöst werden.

Beispiel: Lösung der Differentialgleichung (3.7): $y' = -\frac{x}{y} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$ Mit $z = \frac{y}{x}$ und $y' = xz' + z$ ergibt sich:

$$xz' + z = -\frac{1}{z} \pm \sqrt{\frac{1}{z^2} + 1} \qquad | - z$$

$$\Leftrightarrow\; xz' = -\frac{1}{z} - z \pm \sqrt{\frac{1}{z^2} + 1} \qquad | \cdot z$$

$$\Leftrightarrow\; xzz' = -1 - z^2 \pm \sqrt{\frac{1}{z^2} + 1} = -[(1 + z^2) \mp \sqrt{1 + z^2}]$$

$$-\frac{zz'}{(1 + z^2) \mp \sqrt{1 + z^2}} = \frac{1}{x} \tag{3.12}$$

Integration von (3.12) liefert: $\ln(\sqrt{1 + z^2} \mp 1) = \ln\frac{c}{x} \Leftrightarrow \sqrt{1 + z^2} = \frac{c}{x} \pm 1$
Rücksubtitution liefert: $y^2 = c^2 \pm 2cx \;\cong$ eine Schar von Parabeln $x \sim y^2$. Gleichung (3.8) läßt sich verallgemeinern und ebenfalls analytisch lösen!

3.3.4 verallgemeinerte homogene Differentialgleichungen

Die Differentialgleichung $y' = f\left(\frac{Ax+By+C}{ax+by+c}\right)$
f sei stetig und a,b,c seinen nicht gleichzeitig 0. $\leftarrow$ Er gilt zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $\begin{vmatrix} A & B \\ a & b \end{vmatrix} \Leftarrow$ Das Gleichungssystem:

$$Ax + By + C = 0$$
$$ax + by + c = 0$$

besitzt genau eine Lösung (entspricht zwei, sich schneidenden Geraden): $x = \alpha$ und $y = \beta$. Mit dem Ansatz $u = x - \alpha$ und $v = y - \beta$ und $u' = 1$ und $v' = 1$, wobei $u' = \frac{du}{dx}$ und $v' = \frac{du}{dy}$ ist $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{Au + Bv}{au + bv}\right) = y' \tag{3.13}$$

Erklärung: $u = x - \alpha$ und $v = y - \beta$ einsetzen in Gleichungssystem:
Zähler :

$$A(u+\beta v)+B(v+\beta)+C = Au+A\alpha+Bv+B\beta+C = Au+Bv+\underbrace{(A\alpha + B\beta + C)}_{0} = Au+Bv \tag{3.14}$$

Nenner: Wie oben!

Vereinfach von (3.13):

$$y' = f\left(\frac{Au + Bv}{au + bv}\right) = f\left(\frac{A + B\frac{v}{u}}{a + b\frac{v}{u}}\right) = g\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{dv}{du} = v'$$

$\Leftarrow g\left(\frac{v}{u}\right) = v'$ ist eine homogene Differentialgleichung in $\frac{v}{u}$.

Fall 2: $\begin{vmatrix} A & B \\ a & b \end{vmatrix} v = 0$ ($\cong$ parallele Gerade) Hier setzt man $z = ax + by + c \, : \, z' = a + by'$. Die Parallelität fordert: $Ax + By + C = az + \beta$
$\Leftrightarrow Ax + By + C = \alpha ax + \alpha by + \alpha c + \beta$
$\Leftrightarrow \alpha = \frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ und $\beta = C - \alpha c$

$$\Rightarrow \text{Differentialgleichung} : z' = a + b \cdot f\left(\frac{\alpha z - \beta}{z}\right) \tag{3.15}$$

$\rightarrow$ Kann durch Trennung der Variablen gelöst werden!

Beispiel :

$$y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 1} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 \neq 0 \Rightarrow \text{ 1. Fall}$$

Gleichungsystem:

$$\left.\begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 = \alpha \\ y = 2 = \beta \end{array}$$

Ansatz: $u = x - 1$, $v = y - 3$ einsetzen in (3.14) ergibt:

$$y' = \frac{dv}{du} = \frac{u+1-v-2+1}{u+1+v+2-3} = \frac{u-v}{u+v} = \underbrace{\frac{1-\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}}}_{\text{homogen!}} = v'$$

Substitution: $z = \frac{v}{u}$, $v = zu \Rightarrow v' = z + z' \cdot u$
$\Rightarrow v' = z + z' \cdot u = \frac{1-z}{1+z} \Leftrightarrow z' \cdot u = \frac{1-z}{1+z} - z = \frac{1-z-z(1+z)}{1+z} = \frac{1-2z-z^2}{1+z}$
$\Leftrightarrow \frac{z'}{\frac{1-2z-z^2}{1+z}} = \frac{1}{u}$
$\Rightarrow \int \frac{dz(1+z)}{1-2z-z^2} = \int \frac{du}{u}$ Substitution:$w = 1 - 2z - z^2$ $\frac{dw}{z} = (-2)(1+z)$
$\Rightarrow (1+z)dz = -\frac{1}{z}dw$
$\Leftrightarrow \int -\frac{1}{2}\frac{dw}{w} = \int \frac{du}{u} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln|w| + C_1 = \ln|u| + C_2$
Rücksubstitution für w: $-\frac{1}{2}\ln|1+2z-z^2| = \ln|u| + C_3$ mit $C_3 = C_2 - C_1$
$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{1}{\sqrt{1-2z-z^2}}\right| = \ln|u| + C_3$ $|e^\wedge$
$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{1-2z-z^2}}\right| = u \cdot C_4$ mit $C_4 = e^{c_3}$
Einsetzen von $u = x - 1$ und $z = \frac{y-z}{x-1}$ ergibt die Lösung!

3.3.5 Exakte Differentialgleichungen

Die explizite Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x, y)$ kann in speziellen Fällen in der Form $y' = f\left(\frac{Ax+By+C}{ax+by+c}\right)$ vorliegen und gelöst werden. Allgemein kann *jede* Funktion $f(x, y)$ *immer* als $f(x, y) = -\frac{h(x,y)}{g(x,y)}$ geschrieben werden!

Frage: Unter welchen Umständen kann die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) = -\frac{h(x, y)}{g(x, y)} \tag{3.16}$$

gelöst werden? Umformen von (3.16):

$$y' \cdot g(x, y) + h(x, y) = 0 \tag{3.17}$$

Trick: Gleichung (3.17) kann *immer* gelöst werden, wenn die linke Seite die Ableitung einer Funktion $F(x, y)$ ist!

$$\Leftrightarrow y' \cdot g(x, y) + h(x, y) = \frac{d}{dx}F(x, y) \tag{3.18}$$

Warum? Falls (3.18) gilt ist die Lösung durch $\frac{d}{dx}F(x, y) = 0$

$$\Leftrightarrow F(x, y) = C \tag{3.19}$$

also durch die bloße Kenntnis von $F(x, y)$ gegeben!

Frage: Unter welchen Umständen gibt es einen Zusammenhang zwischen der Darstellung auf der linken Seite von (3.18) und der Lösung der Differentialgleichung als $F(x, y)$ in Gleichung (3.19)?

Antwort: Falls $y' \cdot g(x, y) + h(x, y)$ das sogenannte *vollständige Differential* von $F(x, y)$ darstellt!

Das vollständige Differential einer Funktion $F(x,y)$ ist gegeben durch:

$$dF(x,y) = \frac{\delta F(x,y)}{\delta x}dx + \frac{\delta F(x,y)}{\delta y}dy \tag{3.20}$$

Teilt man (3.20) durch dx, so erhält man:

$$\Rightarrow \frac{dF(x,y)}{dx} = \frac{\delta F(x,y)}{\delta x} + \frac{\delta F(x,y)}{\delta y}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=y'} \tag{3.21}$$

$\Rightarrow$ Vergleich mit (3.18) liefert: $h(x,y) = \frac{\delta F(x,y)}{\delta x}$; $g(x,y) = \frac{\delta F(x,y)}{\delta y}$

Definition :
Die Differentialgleichung $y'g(x,y) + h(x,y) = 0$ heißt *exakt* , wenn es eine Funktion $F(x,y)$ mit

$$\frac{\delta F(x,y)}{\delta x} = h(x,y) \qquad \text{und} \qquad \frac{\delta F(x,y)}{\delta y} = g(x,y) \tag{3.22}$$

gibt. Notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist:

$$\frac{\delta h(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta g(x,y)}{\delta x} \tag{3.23}$$

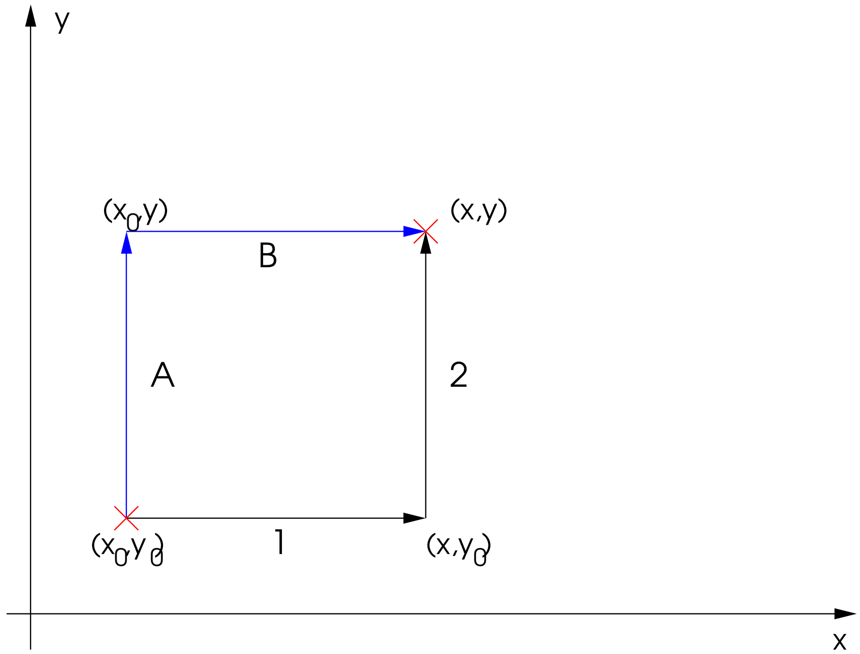
(**Integrabilitätsbedingung**)

Beispiel :
$y'(6xy + x^2 + 3) + 3y^2 + 2xy + 2x = 0$ mit $g(x,y) = 6xy + x^2 + 3$ und $h(x,y) = 3y^2 + 2xy + 2x$
Frage: Ist die Differentialgleichung exakt?
$\Rightarrow \frac{\delta g(x,y)}{\delta x} = 6y + 2x \qquad \frac{\delta h(x,y)}{\delta y} = 6y + 2x$
$\Rightarrow \frac{\delta g(x,y)}{\delta x} = \frac{\delta h(x,y)}{\delta y}$
$\Rightarrow$ Die Differentialgleichung ist exakt!

Merke: Immer erst die Integrabilitätsbedingung prüfen!

Lösungsformel :
Mit (3.20) und (3.22) ist die *allgemeine* Lösung: $dF(x,y) = h(x,y)dx + g(x,y)dy \Leftrightarrow F(x,y) = C$. Die Funktion $F(x,y)$ läßt sich über einen *beliebigen* Integrtionsweg $(x_0,y_0) \rightarrow (x,y)$ berechnen (wegen (3.23)). Es gilt:

$$F(x,y) - F(x_0,y_0) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} [h(u,v)du + g(u,v)dv]$$



Am Einfachsten ist ein Rechwinkelzug:

1. Weg 1) $h(u, y_0)$ 2) $g(x_0, v)$

Alternativer Weg A) $g(x, v)$ B) $h(u, y)$

$$\Rightarrow F(x,y) - F(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} h(u,y_0)du + \int_{y_0}^{y} g(x,v)du = \int_{y_0}^{y} g(x_0,v)du + \int_{x_0}^{x} h(u,y)du \tag{3.24}$$

Merke: Ob man der Weg 1),2) oder A),B) wählt ist egal! D.h. man sollte dijenige Kombination wählen, bei der $h(u, y_0)$ oder $g(x_0, v)$ sehr einfach wird!

Beispiel :
$y'\underbrace{(4x^3y^3 + 2x^4y)}_{g(x,y)} + \underbrace{(3x^2y^4 + 4x^3y^2)}_{h(x,y)} = 0$ ist exakt. (nachrechnen!) gesucht ist die Lösung für $x_0 = y_0 = 0$.

$$\Rightarrow F(x,y) - F(0,0) = \int_0^x 0du + \int_0^y (4x^3v^3 + 2x^4v)dv = x^3y^4 + x^4y^2$$

Allgemeine Lösung: $x^3y^4 + x^4y^2 = C$

3.3.6 Methode des integrierenden Faktors

$\rightsquigarrow$ Idee von Leonard Euler ($\star$1707, †1783): Falls eine Differentialgleichung der Form $y'g(x,y)+h(x,y)=0$ nicht exakt ist, so multipliziere man sie mit einer Funktion $\mu(x,y)$, so daß eine exakte Differentialgleichung entsteht!

$$y'g(x,y)\mu(x,y)+h(x,y)\mu(x,y)=0 \tag{3.25}$$

Die Bedingung hierfür lautet gemäß der Intergrabilitätsbedingung (3.23):

$$\frac{\delta(g\mu)}{\delta x}=\frac{\delta(h\mu)}{\delta y}\Leftrightarrow h\frac{\delta\mu}{\delta x}-g\frac{\delta\mu}{\delta x}=\mu\left(\frac{\delta g}{\delta x}-\frac{\delta h}{\delta y}\right) \tag{3.26}$$

$\Rightarrow$ Gleichung (3.26) ist eine *partielle* Differentialgleichung zur Bestimmung von $\mu(x,y)$!
$\rightsquigarrow$ Eine *beliebige* spezielle Lösung von (3.26) genügt!

Merke: Man versucht immer möglichst einfache intigrierende Faktoren zu finden, die z.B. *nur* von x, y oder $\frac{x}{y}$ abhängen!

Beispiel :
$y'(xy-x^2)+y^2-3xy-2x^2=0$ ist *nicht* exakt, da $\frac{\delta g}{\delta x}=y-2x$ und $\frac{\delta h}{\delta y}=2y-3x$. Die Multiplikation der Gleichung mit $\mu(x,y)=2x$ überführt die Differentialgleichung in eine exakte Differentialgleichung :

$$\begin{aligned} y'(xy-x^2)+y^2-3xy-2x^2&=0 \qquad |\cdot 2x \\ y'(2x^2y-2x^3)+2xy^2-6x^2y-4x^3&=0 \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung ist exakt!

Spezielle integrierende Faktoren :
$\rightsquigarrow$ Man mache *allgemeine* Annahmen, um eine *Klasse* von Lösungen zu bekommen!

Beispiel :
Allgemeine Annahme: DEr integriernde Faktor sei *nur* von x abhängig: $\mu(x,y)=\mu(x)$. Damit wird (3.26) zu:

$$g\underbrace{\frac{\delta u}{\delta x}}_{=\mu'}=\mu\left(\frac{\delta h}{\delta y}-\frac{\delta g}{\delta x}\right)=g\mu' \tag{3.27}$$

$\Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu}=\frac{\frac{\delta h}{\delta y}-\frac{\delta g}{\delta x}}{g}=f(x)$, da μ' und μ nur von x abhängen. $\Rightarrow \frac{\mu'}{\mu}=f(x)$ ist eine Differentialgleichung , die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann! Lösung:

$$\mu(x)=e^{\int f(x)dx} \text{ mit } f(x)=\frac{\frac{\delta h}{\delta y}-\frac{\delta g}{\delta x}}{g} \tag{3.28}$$

$$y' \underbrace{(xy - x^2)}_{g(x,y)} + \underbrace{y^2 - 3xy - 2x^2}_{h(x,y)} = 0 \qquad (\star)$$

Annahme: $\mu = \mu(x)$, dann währe

$$\mu(x) = e^{\left(\int \frac{2y-3x-y+2x}{xy-x^2} dx\right)} = e^{\left(\int \frac{y-x}{x(y-x)} dx\right)} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x = f(x)$$

Also: Annahme korrekt, da sich alle y herauskürzen!
Probe:

$$(\star) \cdot x \Leftrightarrow y' \underbrace{\frac{(x^2y - x^3)}{g(x,y)}}_{g(x,y)} + \underbrace{\frac{y^2x - 3x^2y - 2x^3}{h(x,y)}}_{h(x,y)} = 0$$

$$\frac{\delta g}{\delta x} = 2xy - 3x^2 \qquad ; \qquad \frac{\delta h}{\delta y} = 2xy - 3x^2$$

$$\Rightarrow \frac{\delta g}{\delta x} = \frac{\delta h}{\delta y}$$

$\Rightarrow$ Die Differentialgleichung ist exakt!

"Kochrezept" :

1. Annamhe aufstellen, z.B. $\mu = \mu(x)$ oder $\mu = \mu(y)$
2. Integrierenden Faktor berechnen
3. überprüfen, ob die Annahme korrekt war
4. Falls nicht $\rightarrow$ neue Anname; goto 1
   Falls ja $\rightarrow \mu \cdot DGL$ bilden
5. Die jetzt exakte Differentialgleichung lösen

3.3.7 Explizite lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Definition: Eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{3.29}$$

mit

$$a_1 \not\equiv 0 \qquad (x \in \mathbb{D}, a_1(x) \text{ "nicht überall gleich" } 0) \tag{3.30}$$

Die Differentialgleichung (3.29) heißt

$$\textit{inhomogen}, \text{ falls } g(x) \neq 0 \tag{3.31}$$

oder

$$\textit{homogen}, \text{ falls } g(x) \equiv 0 \tag{3.32}$$

ist (für $x \in \mathbb{D}$). Wird die Bedingung (3.30) zu

$$a_1(x) \neq 0 \qquad (x \in \mathbb{D}) \tag{3.33}$$

verschärft, so kann (3.29) in die *explizite* Differentialgleichung

$$y' = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)}y + \frac{g(x)}{a_1(x)} \tag{3.34}$$

umgeformt werden.

A - Der homogene Fall $g(x) \equiv 0$

$$\rightsquigarrow y_h' = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)}y_h \tag{3.35}$$

Lösung durch Trennung der Variablen:

$$y_h(x) = C \cdot e^{-\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx} \tag{3.36}$$

mit C eine beliebige Integrationskonstante.

Beispiel: $\dot{x} + t^2 x = 0 \quad$ mit $\quad x = x(t) \Leftrightarrow \dot{x} = -t^2 x$
$\Rightarrow a_0(t) = t^2, \quad a_1(t) = 1$
Lösung: $x(t) = C \cdot e^{-\int t^2 dt} = C \cdot e^{-1\frac{1}{3}t^3}$

B - Der inhomogene Fall $g(x) \neq 0$

$$\Rightarrow a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{3.37}$$

Satz: Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhält man dadruch, dass man zu einer *beliebigen speziellen* Lösung der inhomogenen Gleichung $y_p(x)$ (Anm.: p = partikulär = speziell) die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y_h(x)$ *addiert* ! Also:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) \tag{3.38}$$

Beweis:

1. Es sei der sogenannte Differentialoperator $L[y]$ durch

$$L[y] = a_1(x)y' + a_0(x)y \tag{3.39}$$

gegeben. Man kann zeigen, das $L[y]$ *linear* ist, d.h. es gilt:

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] \tag{3.40}$$

für zwei beliebige Funktionen y_1, y_2 und Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2. Ist $y_p(x)$ *eine* spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3.37), so ist wegen (3.39):

$$L[y_p] = g(x) \tag{3.41}$$

3. Ist $y_h(x)$ *eine* beliebige Lösung der homogenen Differentialgleichung (3.35), so gilt:

$$L[y_h] = 0 \tag{3.42}$$

4. Wegen der Linearität von L (3.40) gilt auch für (3.38) $y(x) = y_p(x) + y_h(x) \qquad L[y] = L[y_p] + L[y_h] = g(x) + 0 = g(x) \qquad \Rightarrow y$ ist eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung .

Einwand: $y_h(x)$ wurde als *eine* beliebige Lösung angenommen!
Frage: Werden durch (3.38) alle Lösungen angegeben, wenn $y_h(x)$ sämtliche Lösungen der homogenen Differentialgleichung durchläuft?
Annahme: $\tilde{y}(x)$ sei irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung (3.37), d.h. es gilt: $L[\tilde{y}] = g(x)$, so ist

$$L[\tilde{y} - y_p] = L[\tilde{y}] - L[y_p] = g(x) - g(x) = 0 \tag{3.43}$$

Es ist also eine Differenz $\tilde{y} - y_p$ eine Lösung der *homogenen* Differentialgleichung (3.35), d.h. *gleich* eine Lösung y_h, d.h. es gilt: $\tilde{y} - y_p = y_h \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{y} = y_p + y_h$
Im Vergleich mit (3.38) stellt man fest, dass $\tilde{y}$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist. Da $\tilde{y}$ beliebig ist, ist damit bewiesen, dass (3.38) die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung (3.37) darstellt!
Weiteres Vorgehen: y_h ist bekannt! Wir benötigen "nur noch" *genau* eine *beliebige* spezielle Lösung y_p!

3.3.8 Variation der Konstanten

Idee: Ausgehend von der Lösung der homogenen Gleichung $y_h(x)$:

$$y_h(x) = C \cdot \hat{y}_h(x) \qquad \text{mit} \qquad \hat{y}_h(x) = e^{-\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx} \tag{3.44}$$

stellt man einen Ansatz fpr $y_p(x)$ her, indem man (3.44) verwendet, aber dort die Konstante C durch eine noch zu bestimmende Funktion $u(x)$ ersetzt:

$$y_p(x) = u(x) \cdot \hat{y}_h(x) \tag{3.45}$$

Einsetzen in (3.37) ergibt: $a_1(u \cdot y_h)' + a_0(u \cdot y_h) = u(a_1\hat{y}_h' + a_0\hat{y}_h) + a_1 u'\hat{y}_h = u \cdot \underbrace{L[\hat{y}_h]}_{=0} + a_1 u'\hat{y}_h = a_1 u'\hat{y}_h = g(x)$

$$\Rightarrow u' = \frac{g(x)}{a_1(x) \cdot \hat{y}_h(x)} \tag{3.46}$$

$\Rightarrow$ Man erhält $u(x)$ durch unbestimmte Integration (man kann auf die Integrationskonstante verzichent (also $C = 0$), da man nur *eine* spezielle Lösung y_p benötigt!).
$\Rightarrow$ Lösungsformel für die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3.37):

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \hat{y}_h(x) \cdot \left[C + \int \frac{g(x)}{a_1(x) \cdot \hat{y}_h(x)} dx \right] \qquad \text{mit } \hat{y}_h(x) = e^{-\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx} \tag{3.47}$$

Beispiel: $\dot{x} + t^2 x = 2t^2$ mit $x = x(t)$ mit $a_1(t) = 1$, $a_0(t) = t^2$ und $g(t) = 2t^2$

1. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung : $x_h(t) = C \cdot e^{-\int t^2 dt} = C \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} \rightarrow \hat{x}_h = e^{-\frac{1}{3}t^3}$
2. Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung : $x(t) = e^{-\frac{1}{3}t^3} \cdot \left[C + \int \frac{2t^2}{e^{-\frac{1}{3}t^3}} dx \right]$ mit $\hat{y}_h(x) = e^{-\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dt}$

Lösung des Integrals: $\int \frac{2t^2}{e^{-\frac{1}{3}t^3}} dt = \int 2t^2 \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} dt$ mit $x = \frac{1}{3}t^3 \rightarrow \frac{dx}{dt} = t^2 \Leftrightarrow dt = \frac{dx}{t^2}$
$\Rightarrow \int 2t^2 \cdot e^x \frac{dx}{t^2} = \int 2e^x dx = 2\int e^x dx = 2e^x = 2e^{\frac{1}{3}t^3} \Rightarrow x(t) = e^{-\frac{1}{3}t^3} \left[C + 2e^{\frac{1}{3}t^3} \right] = 2 + C \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$

3.3.9 Aufsuchen einer speziellen Lösung

- Da man nur *eine* spezielle Lösung y_p beötgit, kann man versuchen, diese zu "erraten"!
- Dazu wählt man zunächst einen bestimmten Funktionstyp aus, der zur Störfunktion "passt", versieht ihn mit Parametern und bestimmt diese durch Einsetzen in die Ausgangs-Differentialgleichung
- Dieses Verfahren funktioniert besonders gut bei der folgenden Klasse von (wichtigen!) Differentialgleichungen

3.3.10 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$\rightsquigarrow$ Ersetzt $a_i(x)$ durch Konstante
$\Rightarrow ay' + by = g(x)$ bzw. $y'(x) + C \cdot y(x) = g(x)$ mit $a, b, c \in \mathbb{D}$ (Sonderfall von 3.3.7)

A - Der homogene Fall $g(x) \equiv 0$ Mit (3.36) gilt:

$$C \cdot e^{-\int c dx} = C \cdot e^{-cx} \tag{3.48}$$

B - Der inhomogene Fall $g(x) \neq 0$

- Variation der Konstanten
- Aufsuchen einer speziellen Lösung: Der Lösungsansatz für $y_p(x)$ wird abängig vom Funktionstyp des Störglieds $g(x)$ gewählt

Beispiel: $y' + 2y = 2x^2 - 4$
A) Homogene Lösung nach (3.48): $y_h(x) = C \cdot e^{-2x}$
$\rightarrow$ Da $g(x)$ ein Polynom in x ist, wählt man für den Lösungsansatz $y_p(x)$ ebenfalls ein Polynom der Form $ax^2 + bx + c$
$\Rightarrow y_p(x) = ax^2 + bx + c$
Bestimmung der Parameter a, b, c durch Einsetzen von y_p und y_p' in die Differentialgleichung : $(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 4$
$\Leftrightarrow 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = 2x^2 - 4$
Koeffizientenvergleich: $2a = 2$; $\quad 2a + 2b = 0$; $\quad b + 2c = -4$
$\Rightarrow a = 1$; $\quad b = -1$; $\quad c = -\frac{3}{2}$
Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{-2} + x^2 - x - \frac{3}{2}$

4 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Gegeben: Explizite Differentialgleichung n-ter ORdnung für die Funktion $y = y(x)$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{4.1}$$

4.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen

Satz: Ist die Funktion $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ als Funktion ihrer $n+1$ Elemente in ihrem Definitionsbereich $\mathbb{D}$ stetig, so existieren dort auch ihre partiellen Ableitungen $\frac{\delta f}{\delta y}, \frac{\delta f}{\delta y'}, ... \frac{\delta f}{\delta y^{(n-1)}}$ und sind diese dort stetig, so ist die Eindeutigkeit und Existenz der *Anfangswertaufgabe* besteht aus der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{4.2}$$

und der Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{4.3}$$

gesicher, falls für die gegebenen Konstanten (4.3)

$$(x_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{D} \tag{4.4}$$

gilt.

Definition: Man sagt $\phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0$ mit $C_1, ..., C_n$ Integrationskonstanten gibt relativ zu $\mathbb{D}$ die *allgemeine* Lösung von (4.1) an, wenn die durch Auflösung von ϕ nach y entstehenden differenzierbaren Funktion $y = y(x)$ die Lösung von (4.1) sind und wenn diese *nicht* mit weniger als n Parametern C_n darstellbar sind!

4.2 Einige Sonderfälle für Differentialgleichungen 2. Ordnung

$\rightarrow y'' = f(x, y, y')$

4.2.1 Die Differentialgleichung $y'' = f(x)$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung kann durch zweimalige Integration gewonnen werden

Beispiel: $y'' = a$ mit $a = const. \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow y' = ax + C_1$
$\Rightarrow y = \frac{1}{2}ax^2 + C_1x + C_2$ mit den Integrationskonstanten C_1, C_2
$\rightsquigarrow$ *Physik/Mechanik:* $s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$

4.2.2 Die Differentialgleichung $y'' = f(x, y')$

$\Rightarrow$ *Man setze* $z(x) = y'$ *und erhält somit eine Differentialgleichung 1. Ordnung!*
$\Rightarrow z' = f(x, z)$
$\rightarrow$ *Lösung für* $z(x)$*! Durch Integration von* $y' = z(x)$ *erhält man die allgemeine Lösung für* $y(x)$*!*
Beispiel: *siehe Praktikum 3!*

4.2.3 Die Differentialgleichung $y'' = f(y)$

$\Rightarrow$ Interessante Identität: Bilde die Ableitung von $\frac{1}{2}y'^2$: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}y'^2\right) = 2 \cdot \frac{1}{2}y' \cdot y'' = y' \cdot y''$
$\Rightarrow y'' = f(y) \qquad | \cdot y'$
$\Leftrightarrow y'y'' = f(y)y'$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}y'^2\right) = f(y)y' \tag{4.5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y'^2 = \int f(y)y'dx + C = \int f(y)dy + C \tag{4.6}$$

Allgemeine Lösung kann über

$$y' = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + 2C} \tag{4.7}$$

und Trennung der Variablen bestimmt werden!

Praktischer Tipp: Um die Fallunterscheidung in (4.7) zu vermeiden, ist es zweckmäßig, zuerst in (4.6) die Konstante aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen!

Beispiel: Gegeben sei $y'' = 2y^3$ mit $y(-2) = 1$ und $y'(-2)) - 1$
Mit (4.6) gilt: $\frac{1}{2}y'^2 = \int f(y)dy + C = 2 \cdot \frac{1}{4}y^4 + C = \frac{1}{2}y^4 + C$
Anfangsbedingung einsetzen: An der Stelle $x = -2$ sind $y' = -1$ und $y = 1$
$\Rightarrow \frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2}(1)^4 + C \qquad \Rightarrow C = 0$
$\Rightarrow y' = \pm y^2$
Wegen $y'(-2) = -1 \ < 0$ kann nur $y' = -y^2$ verwendet werden! $y' = -y^2 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} = -1 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = -\int dy \Rightarrow -\frac{1}{y} = -x + C_1$. Mit $y(-2) = 1$ ist $C_1 = -3$
Lösung: $y = \frac{1}{x+3}$ (für $x > -3$)

4.3 Explizite homogene und inhomogene linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Definition: Eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung für eine Funktion $y(x)$ ist $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$. Oder in Kurzform:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(i)} = g(x) \tag{4.8}$$

$$\text{mit } a_n(x) \not\equiv 0 \tag{4.9}$$

Die Differentialgleichung (4.8) heißt

$$\textit{inhomogen} \text{ , falls } g(x) \not\equiv 0 \tag{4.10}$$

$$\textit{homogen} \text{ , falls } g(x) = 0 \tag{4.11}$$

Wird die Bedingung (4.9) verschärft zu $a_n \not\equiv 0$, so kann (4.8) in die *explizite* lineare Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) = -\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{a_i(x)}{a_n(x)} y^{(i)} \right) + \frac{g(x)}{a_n(x)} \tag{4.12}$$

umgeformt werden.
Allgemeine Lösung im inhomogenen Fall: $\rightsquigarrow$ genau wie im Fall 1. Ordnung!

Satz: Die allgemeine Lösung $y(x)$ der expliziten linearen inhomogenen Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)} = g(x) \qquad \text{mit} \qquad a_n(x) \neq 0 \tag{4.13}$$

ist gleich einer speziellen Lösung $Y_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung (4.13) plus der allgemeinen Lösung $y_k(x)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) y_h^{(i)} = 0 \tag{4.14}$$

Also:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) \tag{4.15}$$

A - Struktur der Lösung im homogenen Fall $\rightsquigarrow$ Trennung der Variablen funktioniert *nicht* (da höherer Ordnung)

Satz: Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung (4.14) bilden einen *n-dimensionalen linearen Raum* , d.h. die allgemeine Lösung kann in der Form

$$y_h(x) = C_1 \cdot y_{h_1}(x) + C_2 \cdot y_{h_2}(x) + ... + C_n \cdot y_{h_n}(x) \tag{4.16}$$

dargestellt werden, wobei

$$y_{h_1}(x), y_{h_2}(x), ..., y_{h_n}(x) \tag{4.17}$$

eine *Basis* des Lösungsraums ist und $C_1, ..., C_n$ beliebige Konstanten sind!